www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION P' DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Dans ce problème A désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients complexes carrées d'ordre 3 et antisymétriques (c'est à dire dont la transposée est égale à l'opposée).

I

1°) Montrer que si X et Y sont deux éléments de A alors $XY - YX \in A$.

2°) Pour tout couple (X,Y) d'éléments de A on pose $[X,Y] = XY - YX$.

Montrer que l'on a, pour tout couple (X,Y) d'éléments de A, $[Y,X] = -[X,Y]$ et que pour tout triplet (X,Y,Z) d'éléments de A et tout couple $(\lambda;\mu)$ d'éléments de $\mathbb{C}$ on a :

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z] \quad \text{et} \quad [Z, \lambda X + \mu Y] = \lambda[Z, X] + \mu[Z, Y]$$

Pour tout triplet (X,Y,Z) d'éléments de A, calculer l'expression :

$$[\,[X,Y]\,,Z\,] + [\,[Y,Z]\,,X\,] + [\,[Z,X]\,,Y\,]$$

3°) On considère la base (J_1, J_2, J_3) de A définie par :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $[J_1, J_2]$, $[J_2, J_3]$ et $[J_3, J_1]$.

II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note L(E) l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des endomorphismes de E. Pour tout couple (u,v) d'éléments de L(E) on définit l'endomorphisme [u,v] de E par $[u,v] = u \circ v - v \circ u$.

Une *représentation* de A sur E est par définition une application linéaire ρ de A dans L(E) telle que pour tout couple (X,Y) d'éléments de A on ait $\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$. Si E est de dimension finie, on dit que cette représentation est de dimension finie.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *invariant par la représentation* ρ si et seulement si pour tout élément X de A, F est *stable par l'endomorphisme* $\rho(X)$, c'est à dire que l'image de F par $\rho(X)$ est contenue dans F. Si E n'admet pas d'autres sous-espaces invariants par ρ que lui-même et le sous-espace nul, on dit alors que la représentation ρ est *irréductible*.

Dans la suite de cette partie, on suppose que E est de dimension finie d et que ρ est une représentation de A sur E.

1°) Pour m = 1, 2 ou 3 on pose $j_m = \rho(J_m)$. On définit les endomorphismes j_+, j_- et j de E par les égalités $j_+ = -j_2 + i j_1$, $j_- = j_2 + i j_1$, $j = i j_3$.

a) Calculer $[j, j_+]$, $[j, j_-]$ et $[j_+, j_-]$.

b) Montrer que pour qu'un sous-espace F de E soit invariant par ρ il faut et il suffit qu'il soit stable par j_+, j_- et j.

Tournez la page S.V.P.

2°) Soit λ_0 une valeur propre de $\mathbf{j}$ dont la partie réelle est minimale, c'est à dire que pour toute valeur propre λ de $\mathbf{j}$ on a $Re(\lambda) \geq Re(\lambda_0)$. Soit $x_0 \neq 0$ un vecteur propre de $\mathbf{j}$ associé à la valeur propre λ_0 .

a) Montrer que $\mathbf{j}(\mathbf{j}_-(x_0)) = (\lambda_0 - 1)\,\mathbf{j}_-(x_0)$. En déduire la valeur de $\mathbf{j}_-(x_0)$.

b) On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'élément x_k de E par la relation $x_k = \mathbf{j}_+(x_{k-1})$.

Montrer que l'on a $\mathbf{j}(x_k) = (\lambda_0 + k)\,x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe un nombre entier naturel s tel que l'on ait :

$x_k \neq 0$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq s$,

$x_k = 0$ pour tout k tel que $k > s$.

c) Montrer que les vecteurs $x_0 , x_1 , \ldots x_s$ sont linéairement indépendants.

Soit E_0 le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_0 , x_1 , \ldots x_s$. Montrer que E_0 est stable par $\mathbf{j}$ et $\mathbf{j}_+$.

3°) Soit $\mathbf{c}$ l'endomorphisme de E défini par $\mathbf{c} = \mathbf{j}_+ \circ \mathbf{j}_- + \mathbf{j} \circ \mathbf{j} - \mathbf{j}$.

a) Montrer que $\mathbf{c}$ commute avec $\mathbf{j}_+$, $\mathbf{j}_-$ et $\mathbf{j}$.

b) Montrer que x_0 est vecteur propre de $\mathbf{c}$ pour la valeur propre $\lambda_0(\lambda_0 - 1)$. En déduire qu'il en est de même pour tous les vecteurs x_k , avec $0 \leq k \leq s$.

c) Montrer que $\mathbf{c}(x_k) = \mathbf{j}_-(x_{k+1}) + (\lambda_0 + k)(\lambda_0 + k + 1)\,x_k$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq s$. En déduire que $\mathbf{j}_-(x_{k+1}) = a_{k+1}\,x_k$, où a_{k+1} est un coefficient dépendant de k que l'on déterminera, et que E_0 est stable par $\mathbf{j}_-$.

Calculer λ_0 en fonction de s .

d) On suppose la représentation ρ irréductible. Déterminer s et λ_0 en fonction de d .

III

Dans cette partie, F désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions à valeurs complexes de classe $\mathbb{C}^\infty$ de trois variables réelles x_1 , x_2 , x_3 . Pour tout couple (p,q) de nombres entiers tel que $1 \leq p \leq 3$, $1 \leq q \leq 3$ et $p \neq q$, on note D_{pq} l'endomorphisme de F qui à une fonction $f \in F$ associe :

$$D_{pq}(f) = x_p \frac{\partial f}{\partial x_q} - x_q \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

(On écrira aussi $D_{pq} = x_p \dfrac{\partial}{\partial x_q} - x_q \dfrac{\partial}{\partial x_p}$)

On pose $\mathbf{j}_1 = D_{32}$, $\mathbf{j}_2 = D_{13}$, $\mathbf{j}_3 = D_{21}$ et $\mathbf{j}_+ = -\mathbf{j}_2 + i\,\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_- = \mathbf{j}_2 + i\,\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j} = i\,\mathbf{j}_3$.

1°) Pour tout triplet (a,b,c) de nombres entiers compris au sens large entre 1 et 3 , et deux à deux distincts, calculer $[D_{ab} , D_{ca}] = D_{ab} \circ D_{ca} - D_{ca} \circ D_{ab}$. En déduire les valeurs des expressions $[\mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2]$, $[\mathbf{j}_2 , \mathbf{j}_3]$, $[\mathbf{j}_3 , \mathbf{j}_1]$ ainsi que $[\mathbf{j} , \mathbf{j}_+]$, $[\mathbf{j} , \mathbf{j}_-]$, $[\mathbf{j}_+ , \mathbf{j}_-]$.

Tournez la page S.V.P.

2°) Soit (p,q) un couple de nombres entiers tel que $1 \leq p \leq 3$, $1 \leq q \leq 3$ et $p \neq q$. On exprime les variables x_p et x_q en fonction de deux nouvelles variables r et α en posant :

$$x_p = r \cos \alpha ,$$

$$x_q = r \sin \alpha ,$$

la troisième variable demeurant inchangée.

Montrer que l'on a $D_{qp} = -\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$.

3°) On exprime les variables x_1, x_2 et x_3 en fonction de trois nouvelles variables r, θ et ϕ, avec $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, (*coordonnées sphériques*) en posant :

$$x_1 = r \cos \theta \cos \phi ,$$

$$x_2 = r \cos \theta \sin \phi ,$$

$$x_3 = r \sin \theta .$$

Montrer que l'on a : $j = -i \dfrac{\partial}{\partial \phi}$, $j_+ = e^{i\phi}\left(-\dfrac{\partial}{\partial \theta} + i \tan \theta \dfrac{\partial}{\partial \phi} \right)$, $j_- = e^{-i\phi}\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta} + i \tan \theta \dfrac{\partial}{\partial \phi} \right)$

(On pourra se servir du système intermédiaire de variables R, ϕ et x_3 telles que x_1 et x_2 s'expriment en fonction de R et ϕ par $x_1 = R \cos \phi$, $x_2 = R \sin \phi$) .

4°) Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de classe C^∞ à valeurs complexes des deux variables réelles ϕ et θ, avec $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Soit n un nombre entier strictement positif.

a) Déterminer l'unique fonction $f_{-n}(\phi,\theta)$ appartenant à E de la forme $A_{-n}(\theta).B_{-n}(\phi)$ qui vérifie les relations : $j(f_{-n}) = -n f_{-n}$, $j_-(f_{-n}) = 0$ et $f_{-n}(0,0) = (-1)^{-n}$

b) Soit $P_{-n}(X)$ le polynôme à coefficients réels en l'indéterminée X défini par : $P_{-n}(X) = \left(1 - X^2\right)^n$

Pour tout nombre entier k supérieur ou égal à 1 on pose : $P_{-n+k}(X) = \dfrac{d^k}{dX^k} P_{-n}(X)$

et l'on définit par récurrence la fonction $f_{-n+k}(\phi,\theta)$ appartenant à E par : $f_{-n+k} = j_+(f_{-n+k-1})$

Montrer que l'on a pour tout nombre entier relatif h supérieur ou égal à -n :

$$f_h(\phi,\theta) = K_h.(\cos \theta)^h . P_h(\sin \theta).e^{ih\phi}$$

où K_h est un coefficient réel que l'on déterminera en fonction de h . En déduire que $f_h(\phi,\theta)$ est identiquement nul pour $h > n$.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail